TPPMark 2018

中野 圭介

東北大学 電気通信研究所

2018年11月22日

TPP 2018 @ 仙台

問題の前提

自然数を要素とする有限列 $[a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}]$ (長さ$k \geq 1$) が妥当 (*valid*) であるとは，次の性質を満たすこととします．

すべての自然数 m, n について，
$m + a_{m\%k} = n + a_{n\%k}$ ならば $m = n$ である．

mをkで割った余り

たとえば，[1,1,1] や [2,0] や [1,5,3] や [2,0,1,9] は妥当ですが， [1,2,1] や [3,0] や [1,3,5] や [2,0,1,8] は妥当ではありません．

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$a_{x\%k}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$x+a_{x\%k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

問題の前提

自然数を要素とする有限列 $[a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}]$ (長さ$k\geq 1$) が妥当 (*valid*) であるとは，次の性質を満たすこととします．

すべての自然数 m, n について，
$m + a_{m\%k} = n + a_{n\%k}$ ならば $m = n$ である．

mをkで割った余り

たとえば，[1,1,1] や [2,0] や [1,5,3] や [2,0,1,9] は妥当ですが， [1,2,1] や [3,0] や [1,3,5] や [2,0,1,8] は妥当ではありません．

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$a_{x\%k}$	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2
$x+a_{x\%k}$	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16

問題の前提

自然数を要素とする有限列 $[a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}]$ (長さ$k\geq 1$) が妥当 (*valid*) であるとは，次の性質を満たすこととします．

すべての自然数 m, n について，
$m + a_{m\%k} = n + a_{n\%k}$ ならば $m = n$ である．

mをkで割った余り

たとえば，[1,1,1] や [2,0] や [1,5,3] や [2,0,1,9] は妥当ですが，[1,2,1] や [3,0] や [1,3,5] や [2,0,1,8] は妥当ではありません．

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$a_{x\%k}$	1	5	3	1	5	3	1	5	3	1	5	3	1	5	3
$x+a_{x\%k}$	1	6	5	4	9	8	7	12	11	10	15	14	13	18	17

問題の前提

自然数を要素とする有限列 $[a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}]$ (長さ$k\geq 1$) が妥当 (*valid*) であるとは，次の性質を満たすこととします．

すべての自然数 m, n について，
$m + a_{m\%k} = n + a_{n\%k}$ ならば $m = n$ である．

mをkで割った余り

たとえば，[1,1,1] や [2,0] や [1,5,3] や [2,0,1,9] は妥当ですが，[1,2,1] や [3,0] や [1,3,5] や [2,0,1,8] は妥当ではありません．

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$a_{x\%k}$	2	0	1	9	2	0	1	9	2	0	1	9	2	0	1
$x+a_{x\%k}$	2	1	3	12	6	5	7	16	10	9	11	20	14	13	15

問題の前提

自然数を要素とする有限列 $[a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}]$ (長さ$k \geq 1$) が妥当 (*valid*) であるとは，次の性質を満たすこととします．

すべての自然数 m, n について，
$m + a_{m\%k} = n + a_{n\%k}$ ならば $m = n$ である．

mをkで割った余り

たとえば，[1,1,1] や [2,0] や [1,5,3] や [2,0,1,9] は妥当ですが， [1,2,1] や [3,0] や [1,3,5] や [2,0,1,8] は妥当ではありません．

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$a_{x\%k}$	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1
$x+a_{x\%k}$	1	3	3	4	6	6	7	9	9	10	12	12	13	15	15

問題の前提

自然数を要素とする有限列 $[a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}]$ (長さ$k \geq 1$) が妥当 (*valid*) であるとは，次の性質を満たすこととします．

すべての自然数 m, n について，
$m + \underbrace{a_{m\%k}}_{m\text{を}k\text{で割った余り}} = n + a_{n\%k}$ ならば $m = n$ である．

たとえば，[1,1,1] や [2,0] や [1,5,3] や [2,0,1,9] は妥当ですが， [1,2,1] や [3,0] や [1,3,5] や [2,0,1,8] は妥当ではありません．

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$a_{x\%k}$	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3
$x+a_{x\%k}$	3	1	5	3	7	5	9	7	11	9	13	11	15	13	17

問題の前提

自然数を要素とする有限列 $[a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}]$ (長さ$k\geq 1$) が妥当 (*valid*) であるとは，次の性質を満たすこととします．

すべての自然数 m, n について，
$m + a_{m\%k} = n + a_{n\%k}$ ならば $m = n$ である．

mをkで割った余り

たとえば，[1,1,1] や [2,0] や [1,5,3] や [2,0,1,9] は妥当ですが， [1,2,1] や [3,0] や [1,3,5] や [2,0,1,8] は妥当ではありません．

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$a_{x\%k}$	1	3	5	1	3	5	1	3	5	1	3	5	1	3	5
$x+a_{x\%k}$	1	4	7	4	7	10	7	10	13	10	13	16	13	16	19

問題の前提

自然数を要素とする有限列 $[a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}]$ (長さ$k \geq 1$) が妥当 (*valid*) であるとは，次の性質を満たすこととします．

すべての自然数 m, n について，
$m + a_{m\%k} = n + a_{n\%k}$ ならば $m = n$ である．

mをkで割った余り

たとえば，[1,1,1] や [2,0] や [1,5,3] や [2,0,1,9] は妥当ですが， [1,2,1] や [3,0] や [1,3,5] や [2,0,1,8] は妥当ではありません．

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$a_{x\%k}$	2	0	1	8	2	0	1	8	2	0	1	8	2	0	1
$x+a_{x\%k}$	2	1	3	11	6	5	7	15	10	9	11	19	14	13	15

問題 1

与えられた列が妥当であるかを判定する関数 ***is_valid*** を定義して，その判定が正しいことを証明してください.

つまり，

$\textbf{\textit{is\_valid}} : \textbf{List}\ \mathbb{N} \to \{\textbf{true, false}\}$ **を定義して，**

$$\textit{is\_valid}\ [a_0,\ldots,a_{k-1}] = \text{true}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall m, n.\quad m + a_{m\%k} = n + a_{n\%k} \Rightarrow m = n$$

を証明する

問題 2

長さ k の列 l=[a_0,a_1,⋯,a_{k-1}] が妥当であり，自然数 n によって定められる自然数の集合 $\{ m \mid m \leq n < m+a_{m\%k} \}$ を Across(n) で表すことにします．このとき，十分大きな自然数 n について，列 l の要素の総和が Across(n) の要素数と k の積と一致することを証明してください．

[1,5,3] の場合（総和は 9，*k* は 3)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$a_{x\%k}$	1	5	3	1	5	3	1	5
$x+a_{x\%k}$	1	6	5	4	9	8	7	12
Across(x)	{0}	{1}	{1,2}	{1,2,3}	{1,2,4}	{1,4,5}	{4,5,6}	{4,5,7}

十分大きな *n* では Across(*n*) の要素数は 3

（9 = 3×3 なので [1,5,3] の場合は命題が成立)

問題 2

長さ k の列 l=[a_0,a_1,⋯,a_{k-1}] が妥当であり，自然数 n によって定められる自然数の集合 $\{ m \mid m \le n < m + a_{m\%k} \}$ を Across(n) で表すことにします．このとき，十分大きな自然数 n について，列 l の要素の総和が Across(n) の要素数と k の積と一致することを証明してください．

[2,0,1,9] の場合（総和は 12，*k* は 4）

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_{x\%k}$	2	0	1	9	2	0	1	9	2	0	1
$x+a_{x\%k}$	2	1	3	12	6	5	7	16	10	9	11
Across(x)	{0}	{0}	{2}	{3}	{3,4}	{3,4}	{3,6}	{3,7}	{3,7,8}	{3,7,8}	{3,7,10}

十分大きな *n* では Across(*n*) の要素数は 3

（12 = 3×4 なので [2,0,1,9] の場合は命題が成立）

背景と関連する出典

Keisuke Nakano:

Shall We Juggle, Coinductively?

Proc. of Certified Proofs and Programs (CPP 2012)

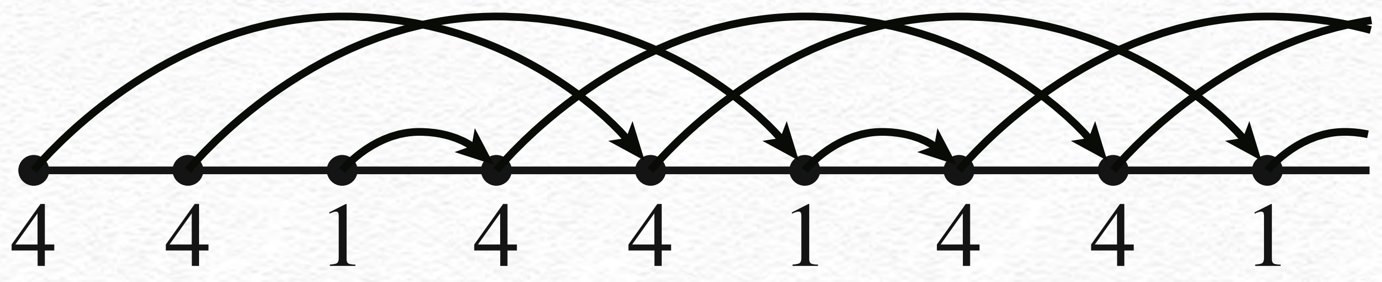
Joe Buhler, David Eisenbud, Ron Graham and Colin Wright

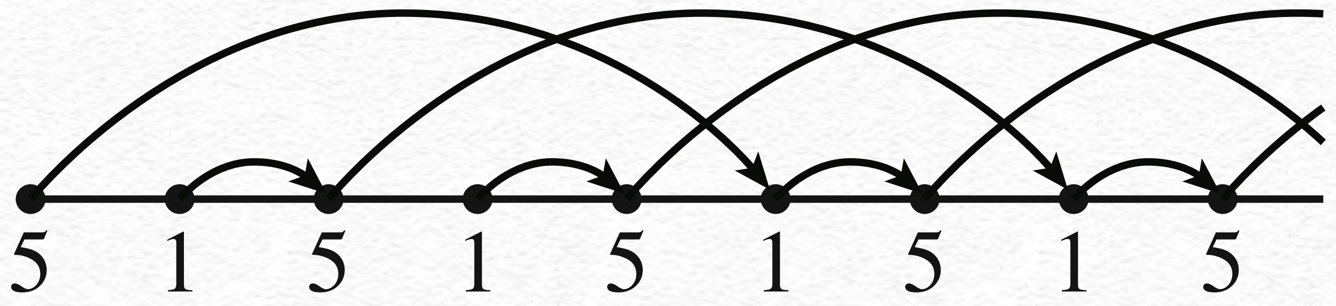
Juggling Drops and Descents

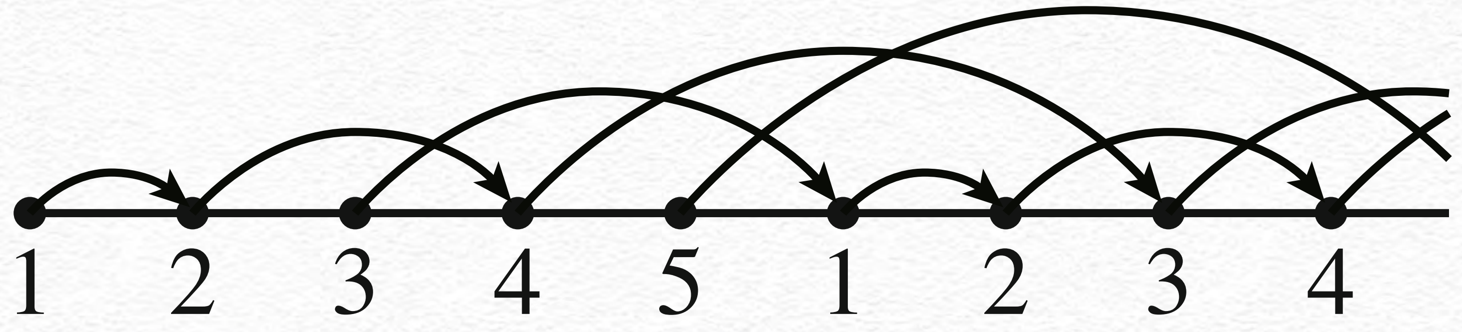
The American Mathematical Monthly, Vol. 101, No. 6 (1994)

サイトスワップ

- **左右交互に投げるお手玉をパターン化した列**
  - [3], [4,4,1], [5,1], [1,2,3,4,5], … など
    - いずれも「妥当」な自然数列
  - 無限に続くパターンの有限表現
    - [4,4,1] なら [4,4,1,4,4,1,4,4,1,4,4,1,…]
  - パターンに現れる数字は投げるボールの滞空時間
    - 次に投げられるまでの単位時間
    - 「妥当」ならばボールが同時に落ちてこない







問題 1 の解答例

与えられた列が妥当であるかを判定する関数 ***is_valid*** を定義して，その判定が正しいことを証明してください.

(定義例)

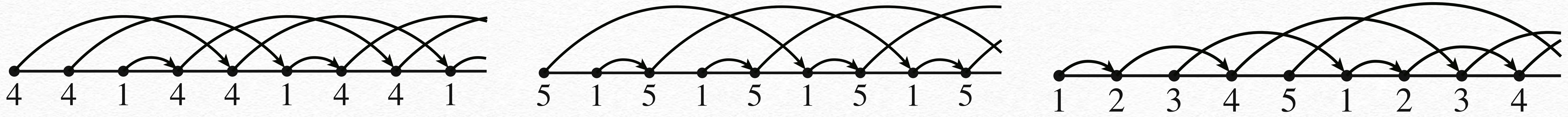
is_valid $[a_0,\ldots,a_i,\ldots,a_{k-1}]$ =
　no_dup $[(a_0+0)\%k,\ldots,(a_i+i)\%k,\ldots(a_{k-1}+k-1)\%k]$

[2,0,1,9] ならば，
[0,1,2,3] を要素ごとに足して 4 で割った余りが [2,1,3,0] となるので，
is_valid [2,0,1,9] は true を返す

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$a_{x\%k}$	2	0	1	9	2	0	1	9	2	0	1	9	2	0	1
$x+a_{x\%k}$	2	1	3	12	6	5	7	16	10	9	11	20	14	13	15

問題 2 の意味

長さ k の列 $l=[a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}]$ が妥当であり，自然数 n によって定められる自然数の集合 $\{ m \mid m \leq n < m+a_{m\%k} \}$ を Across(n) で表すことにします．このとき，十分大きな自然数 n について，列 l の要素の総和が Across(n) の要素数と k の積と一致することを証明してください．



この図において軌跡の本数がボールの数に相当
Across(n) は，時間 n において通る軌跡の本数
「xs が妥当なサイトスワップならば xs の平均値がボールの数と一致する」という定理を証明する問題

提出された解答 (提出順)

- **Mitsuharu Yamamoto (Chiba Univ.)**
  - Coq/SSReflect; 問題公開後，4日ほどで解答
- **Kenta Inoue (Chiba Univ.)**
  - Coq/SSReflect; 短いスクリプトで証明
- **Jacques Garrigue (Nagoya Univ.)**
  - Coq/SSReflect; 定義・仕様に沿ったアプローチ
- **Kokichi Futatsugi (JAIST)**
  - CafeOBJ; 詳細はこのあとに講演あり

⇒ いずれの解答もTPPのWebページで公開しています